$\triangleright$ **Exercice :** Calculer l'intégrale $I = \int\int_{\mathcal{D}} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

Correction non disponible

$\triangleright$ **Exercice :** Calculer $\int\int_\Delta (x^3 - 2y)dxdy$ avec $\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma y^2dx+x^2dy$ lorsque Γ est l'une des courbes suivantes :

1 ⋄ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ avec $a>0,\ b>0$.

2 ⋄ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{2x}{a}-\dfrac{2y}{b}=0$ avec $a>0,\ b>0$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma z\,dx + x\,dy + y\,dz$ lorsque Γ est le cercle (supposé orienté) d'équations :

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma (x - y^3)\, dx + x^3\, dy$ lorsque Γ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcouru une fois dans le sens positif.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xyz\,dz$ lorsque Γ est le cercle d'équations paramétrées :

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ z &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin t \end{cases}$$

t allant de 0 à 2π.

Correction non disponible

$\triangleright$ **Exercice :** Calculer de deux façons différentes l'intégrale double : $I = \displaystyle\iint_{\Delta} (2x^3 - y)\, dx\, dy$ où $\Delta : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer

1 ◇ $\displaystyle\iint_\Delta y^x\,dx\,dy$ où $\Delta : \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq 1\big\}$.

2 ◇ $\displaystyle\iint_\Delta xy\,dx\,dy$ où Δ est la partie du plan délimitée par les paraboles d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.

3 ◇ $\displaystyle\iint_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ où Δ est le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

4 ◇ $\displaystyle\iint_\Delta (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où Δ est le quart du disque elliptique fermé donné par :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \quad (a > 0,\ b > 0)$$

5 ◇ $\displaystyle\iint_\Delta (x+y)\,dx\,dy$ où $\Delta : \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1,\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\big\}$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer

1 ◇ $\displaystyle\iiint_\Delta (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ où $\Delta :\ \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$.

2 ◇ $\displaystyle\iiint_\Delta x^2ye^{xyz}\,dx\,dy\,dz$ où $\Delta=[0,1]^3$.

3 ◇ $\displaystyle\iiint_\Delta z\,dx\,dy\,dz$ où $\Delta :\ \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 1\}$.

4 ◇ $\displaystyle\iiint_\Delta z^2\,dx\,dy\,dz$ où $\Delta :\ \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer le volume de la partie du cylindre $x^2 + y^2 - ax \leq 0$ intérieure à la sphère de centre O et de rayon a.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Les deux questions sont indépendantes :

1 ◇ Montrer que la forme différentielle $\omega = (2x\cos y - y^2 \sin x)dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)dy$ est exacte sur $\mathbb{R}^2$ et trouver ses primitives.

2 ◇ Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ lorsque Γ est un arc $\mathcal{C}^1$ d'extrémités $A(3,4)$ et $B(5,12)$ ne passant pas par O.

Correction non disponible

$\triangleright$ **Exercice :** Utiliser les coordonnées polaires pour calculer

$$\iint_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x^2+y^2 \leq 1, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 0\}$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer $\displaystyle\iiint_\Delta xyz\,dx\,dy\,dz$, $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** En utilisant le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$, calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$ où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}$.

Correction

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) = (u, v) \end{array}$. On remarque que par rapport à la formule de changement de variables données en cours on a (x, y) en fonction de (u, v) et non (u, v) en fonction de (x, y). Attention donc à bien adapter la formule...

Il faut montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$–difféormorphisme et il faut également déterminer $\varphi(\mathcal{D})$.

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & = & x + y \\ v & = & x - y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{u+v}{2} \\ y & = & \frac{u-v}{2} \end{array}\right.$$

Donc φ est bijective et $\varphi^{-1}(u, v) = \left(\dfrac{u + v}{2}, \dfrac{u - v}{2}\right)$. De plus, comme φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$, cela montre que φ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme.

Déterminons $\varphi(\mathcal{D})$:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x + y & \leq & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 0 \leq x + y & \leq & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \frac{u+v}{2} & \geq & 0 \\ \frac{u-v}{2} & \geq & 0 \\ 0 \leq u & \leq & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} v & \geq & -u \\ v & \leq & u \\ 0 \leq u & \leq & 1 \end{array}\right.$$

Enfin, il reste à déterminer $\det J_{\varphi^{-1}}(u, v)$. On peut soit calculer ce jacobien directement à l'aide de l'expression de φ^{-1}, soit passer le calcul du jacobien de φ et utiliser la relation $\det J_{\varphi^{-1}}(u, v) = (\det J_\varphi(x, y))^{-1}$. Dans les deux cas, on trouve $\det J_{\varphi^{-1}}(u, v) = \dfrac{-1}{2}$.

Donc,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} \times |\frac{-1}{2}| dv \right) du = \frac{1}{2} \int_0^1 u(e - 1) du \\ &= \frac{e - 1}{4} \end{aligned}$$

$\triangleright$ **Exercice :** En utilisant le changement de variables $u = x+y+z$, $uv = y+z$, $z = uvw$, calculer l'intégrale $\iiint_{\mathcal{D}} xyzdxdydz$ où $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.

Correction

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & = & x+y+z \\ uv & = & y+z \\ z & = & uvw \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & u-uv = u(1-v) \\ y & = & uv-uvw = uv(1-w) \\ z & = & uvw \end{array}\right.$$

On pose $\varphi :\ (u,v,w) \mapsto (u(1-v), uv(1-w), uvw) = (x,y,z)$.

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \\ x+y+z \leq 1 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \\ 0 \leq x+y+z \leq 1 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} u(1-v) & \geq & 0 \\ uv(1-w) & \geq & 0 \\ uvw & \geq & 0 \\ 0 \leq u & \leq & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} u \geq 0 & \text{et} & 1-v \geq 0 \\ uv \geq 0 & \text{et} & 1-w \geq 0 \\ uv \geq 0 & \text{et} & w \geq 0 \\ 0 \leq & u & \leq 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{ccc} u \geq 0 & \text{et} & 1-v \geq 0 \\ uv \leq 0 & \text{et} & 1-w \leq 0 \\ uv \leq 0 & \text{et} & w \leq 0 \\ 0 \leq & u & \leq 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} u \geq 0 & \text{et} & v \leq 1 \\ v \geq 0 & \text{et} & w \leq 1 \\ v \geq 0 & \text{et} & w \geq 0 \\ 0 \leq & u & \leq 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{ccc} u \geq 0 & \text{et} & v \leq 0 \\ v \leq 0 & \text{et} & w \geq 1 \\ v \leq 0 & \text{et} & w \leq 0 \\ 0 \leq & u & \leq 1 \end{array}\right. \text{ impossible}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 0 \leq & u & \leq 1 \\ 0 \leq & v & \leq 1 \\ 0 \leq & w & \leq 1 \end{array}\right.$$

On trouve $J_\varphi(u,v,w) = u^2 v$ d'où

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}} xyzdxdydz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u^3 v^2 (1-v) w (1-w) |\underbrace{u^2 v}_{\geq 0}| dudvdw \\ &= \left(\int_0^1 u^5 du\right) \left(\int_0^1 v^3(1-v) du\right) \left(\int_0^1 w(1-w) du\right) = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

▷ **Exercice :** Soit ABC le triangle de sommets $A(-2,0)$, $B(1,-\sqrt{3})$ et $C(1,\sqrt{3})$ dans le plan euclidien. On note Δ le domaine délimité par le triangle ABC.
Calculer $\displaystyle\iint_\Delta (x^2+y^2)dx\,dy$ (*On pourra déterminer une équation cartésienne des droites* (AB) *et* (AC))

Correction

$(AC):\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ et $(AB):\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

Donc, $\displaystyle\iint_\Delta (x^2+y^2)dx\,dy=\int_{-2}^{1}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}^{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}(x^2+y^2)dydx=2\int_{-2}^{1}\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}(x^2+y^2)dydx=3\sqrt{3}.$

▷ **Exercice :** Soit D la partie du demi–plan $y > 0$ limitée par les 4 paraboles :

$$\mathcal{P}_1 : \quad y^2 = 4x + 4 \qquad \mathcal{P}_2 : \quad y^2 = 2x + 1 \qquad \mathcal{P}_3 : \quad y^2 = 9 - 6x \qquad \mathcal{P}_4 : \quad y^2 = 4 - 4x$$

et

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} \end{array}$$

Calculer $I = \iint_D f$ en utilisant le changement de variable défini par $x = u^2 - v^2$ et $y = 2uv$ ($u > 0$, $v > 0$).

Correction non disponible

$\triangleright$ **Exercice :** Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$ avec

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/ y \geq 0, \;\; x^2 + y^2 - x \leq 0, \;\; x^2 + y^2 - y \geq 0\} \text{ et } f(x,y) = x^2 + y^2$$

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Soit $r > 0$. On note $\mathcal{A}_r = [0, r] \times [0, r]$ et $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \,/\, 0 \leq x^2 + y^2 \leq r\}$.
On pose $f(r) = \iint_{\mathcal{A}_r} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et $g(r) = \int\int_{B_r} e^{-x^2-y^2} dxdy$.

1 ⋄ Montrer que $g(r) \leq f(r) \leq g(r\sqrt{2})$.

2 ⋄ En déduire la valeur de $\lim\limits_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-t^2} dt$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Calculer l'intégrale double $\iint_D f(x,y)dxdy$ avec

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\;\; y \geq 0,\;\; y \leq x,\;\; x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et } f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$$

Correction non disponible

▷ **Exercice :** On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour $x \neq 0$ par

$$\varphi(x, y, z) = \left(x + y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = (u, v, w)$$

1 ⋄ Soit $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x > 0,\ x + y > 0\}$. Montrer brièvement que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et calculer sa matrice jacobienne.

2 ⋄ $d\varphi_{(x,y,z)}$ désignant la différentielle de φ en $(x, y, z) \in \mathcal{O}$, donner l'expression de $d\varphi_{(x,y,z)}(h, k, l)$.

3 ⋄ On considère l'ouvert $\Omega = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,/\, u > 0,\ 1 + v > 0\}$. Montrer que φ est bijective de $\mathcal{O}$ sur Ω en calculant son application réciproque. En déduire que φ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω.

4 ⋄ On considère $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 < x < 1,\ 0 < y < \min(x, 1 - x),\ 0 < z < x\}$. Montrer que $\varphi(\mathcal{D}) =]0, 1[^3$ (on pourra montrer une double inclusion).
NB : on pourra le cas échéant admettre le résultat et faire la question suivante.

5 ⋄ A l'aide du difféomorphisme précédent, calculer l'intégrale $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{x + y}{x(x^2 + z^2)} dxdydz$.

Correction

1 ⋄ Puisque $\forall (x, y, z) \in \mathcal{O}$, $x \neq 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

$$J_\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \\ -\dfrac{z}{x^2} & 0 & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$$

2 ⋄ $d\varphi_{(x,y,z)}(h, k, l) = \left(h + k, -\dfrac{y}{x^2}h + \dfrac{1}{x}k, -\dfrac{z}{x^2}h + \dfrac{1}{x}l\right)$.

3 ⋄ Soit $(u, v, w) \in \Omega$.

$$\left\{\begin{array}{lcc} u & = & x + y \\ v & = & \frac{y}{x} \\ w & = & \frac{z}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} u & = & x(1 + v) \\ y & = & xv \\ z & = & xw \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} x & = & \frac{u}{1+v} \\ y & = & \frac{uv}{1+v} \\ w & = & \frac{uw}{1+v} \end{array}\right. \quad (1 + v > 0)$$

et $\left\{\begin{array}{ccc} x & > & 0 \\ x + y & > & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 1 + v & > & 0 \\ u & > & 0 \end{array}\right.$. Donc φ est bijective de $\mathcal{O}$ sur Ω.
De plus, φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $(1 + v \neq 0)$ donc d'après la questions 1 ⋄, φ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme.

4 ⋄ $\boxed{\subset}$ Soit $(x, y, z) \in \mathcal{D}$.
$x > 0$, $y > 0$ et $z > 0 \Rightarrow u = x + y > 0$, $v = \dfrac{y}{x} > 0$ et $w = \dfrac{z}{x} > 0$.
$z < x \Rightarrow w = \dfrac{z}{x} < 1$, $y < \min(x, 1 - x) \Rightarrow y < x$ et $y < 1 - x \Rightarrow v = \dfrac{y}{x} < 1$ et $u = x + y < 1$.
Ainsi, $\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}$, $\varphi(x, y, z) = (u, v, w) \in]0, 1[^3$ ie $\varphi(\mathcal{D}) \subset]0, 1[^3$.

$\boxed{\supset}$ Soit $(u, v, w) \in]0, 1[^3$.
$u > 0$, $v > 0$ et $w > 0 \Rightarrow x = \dfrac{u}{1 + v} > 0$, $y = \dfrac{uv}{1 + v} > 0$ et $z = \dfrac{uw}{1 + v} > 0$.
$u < 1$ et $1 + v > 1 \Rightarrow x = \dfrac{u}{1 + v} < 1$ puis $z = xw$ avec $w < 1 \Rightarrow z < 1$.
$y = xv$ avec $v < 1$ donc $y < x$ et $u < 1$ donc $x + y < 1$ puis $y < 1 - x$. Ainsi, $y < x$ et $y < 1 - x$ $\Rightarrow y < \min(x, 1 - x)$.

Donc, $\forall (u, v, w) \in]0, 1[^3$, $(x, y, z) = \varphi^{-1}(u, v, w) \in \mathcal{D}$ ie $]0, 1[^3 \subset \varphi(\mathcal{D})$.

5 $\diamond$ Calculons le jacobien de φ^{-1} en (u,v,w) :

$$\det J_{\varphi^{-1}}(u,v,w) = (\det J_\varphi(x,y,z))^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}\right)} = \frac{x^3}{x+y} > 0$$

Donc $\dfrac{x+y}{x(x^2+z^2)} \times |\underbrace{\det J_{\varphi^{-1}}(u,v,w)}_{\geq 0}| = \dfrac{x^2}{x^2+z^2} = \dfrac{\frac{u^2}{(1+v)^2}}{\frac{u^2}{(1+v)^2} + \frac{u^2w^2}{(1+v)^2}} = \dfrac{1}{1+w^2}$.

Puis

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{x+y}{x(x^2+z^2)} dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{du\,dv\,dw}{1+w^2} = \frac{\pi}{4}$$

▷ **Exercice :** Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+y \geq 1, y \leq x, x^2+y^2 \leq 1\}$.

1 ⋄ Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.

2 ⋄ Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ en utilisant les coordonnées polaires.

Correction

1 ⋄ On obtient le domaine suivant :

2 ⋄ On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ $(r>0)$.

$$(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} r\sin\theta \leq r\cos\theta \\ r\cos\theta + r\sin\theta \geq 1 \\ r^2 \leq 1 \end{array} \right. \underset{r>0}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \leq \cos\theta \\ r(\cos\theta+\sin\theta) \leq 1 \\ r \leq 1 \end{array} \right. \underset{r>0}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ r \in \left[\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}, 1\right] \end{array} \right.$$

Donc $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} \frac{|r|drd\theta}{|r|^3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} \frac{drd\theta}{r^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos\theta-\sin\theta)d\theta = 1+\frac{\pi}{4}$

▷ **Exercice :**

1 ⋄ Quel est l'ensemble des points du plan tels que $x^2 + y^2 - 2y = 0$?

2 ⋄ Dessiner le domaine $\mathcal{D}$ défini par $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2y \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

3 ⋄ Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Déterminer la mesure du volume de la portion d'espace définie par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 - 2xy \leq 0 \;\text{ et }\; \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$$

Correction non disponible

▷ **Exercice :**

1 ◇ Quel est l'ensemble des points du plan vérifiant $x^2+y^2-y=0$? Et celui des points du plan vérifiant $x^2+y^2-x=0$?

2 ◇ Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}$ défini par : $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2-y\geq 0 \text{ et } x^2+y^2-x\leq 0\right\}$.

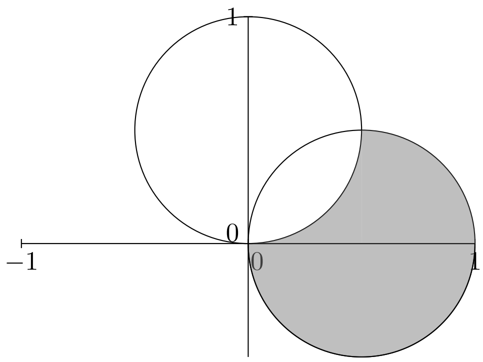
3 ◇ Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} xydxdy$.

Correction

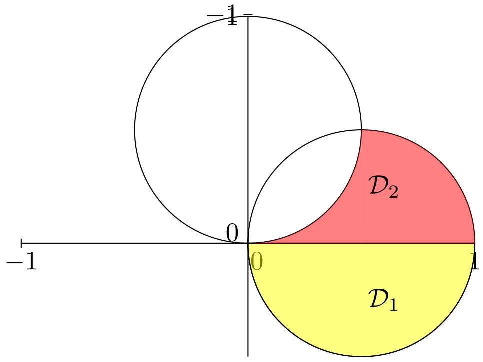
1 ◇ $x^2+y^2-y=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. Donc l'ensemble des points du plan vérifiant $x^2+y^2-y=0$ est le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

De même, les points du plan vérifiant $x^2-x+y^2=0$ est le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

2 ◇ A l'aide de ce qui a été dit précédemment on obtient :



3 ◇ Nous allons passer en coordonnées polaires en posant $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. Notons $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x>0 \text{ et } y<0\right\}$ et $\mathcal{D}_2=\mathcal{D}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x>0 \text{ et } y>0\right\}$. On a donc $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2$:



Ainsi $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} xydxdy=\iint_{\mathcal{D}_1} xydxdy+\iint_{\mathcal{D}_2} xydxdy$.

$(x,y)\in\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ et $r\in[0,\cos(\theta)]$ et $(x,y)\in\mathcal{D}_2\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $r\in[\sin(\theta),\cos(\theta)]$ donc :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} xydxdy &= \int_{\theta=-\pi/2}^{0}\int_{r=0}^{\cos\theta} r^2\cos(\theta)\sin(\theta)|r|drd\theta+\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=\sin\theta}^{\cos\theta} r^2\cos(\theta)\sin(\theta)|r|drd\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_{\theta=-\pi/2}^{0}\sin\theta\cos^5\theta d\theta+\frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\pi/4}(\sin\theta\cos^5\theta d\theta-\cos\theta\sin^5\theta d\theta) \\
&= \frac{-1}{24}+\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}+1-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{96}
\end{aligned}$$

$\triangleright$ **Exercice :** Soit $\mathcal{U}$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \leq x^2,\ y \geq -x^2,\ y \geq x^2 - 2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\right\}$$

1 $\diamond$ Représenter graphiquement $\mathcal{U}$.

2 $\diamond$ Soit $\varphi :\ (x,y) \in \mathcal{U} \mapsto (u,v) = (x^2 - y, x^2 + y)$.

(a) Vérifier que l'image de $\mathcal{U}$ par φ est le pavé $\mathcal{R} = [0,2] \times [0,1]$.

(b) Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{R}$ et déterminer φ^{-1}.

3 $\diamond$ Utiliser le changement de variables φ pour calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{U}} x(x^4 - y^2)dxdy$.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** $\mathcal{D}$ désigne le demi-disque supérieur de centre $(1,0)$ et de rayon 1. Calculer

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Correction non disponible

▷ **Exercice :**

1 ⋄ Montrer que la forme différentielle

$$\omega(x, y) = (xy - y^2 + 1)\,\mathrm{d}x + (x^2 - xy - 1)\,\mathrm{d}y$$

n'est pas fermée.

2 ⋄ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que la forme différentielle

$$\omega(x, y) f(xy)$$

soit exacte et déterminer ses primitives.

Correction non disponible

▷ **Exercice :** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a>0$, $b>0$. On note Γ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ et $\mathcal{D}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 \leqslant 0$

1 ⋄ Calculer l'intégrale double $I=\iint_{\mathcal{D}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (on posera $x=ar\cos\theta$ et $y=br\sin\theta$).

2 ⋄ Calculer l'intégrale curviligne $J=\int_{\Gamma}(y^3\,\mathrm{d}x-x^3\,\mathrm{d}y)$

3 ⋄ Quelle relation existe-t-il entre I et J ?

Correction non disponible