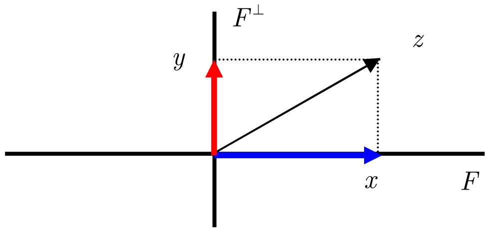
Fiche – Projection orthogonale

Projeté orthogonal – Principe

On suppose que $(E,\langle\ \mid\ \rangle)$ est un espace euclidien. On suppose que F est un sous espace vectoriel de E.
Soit $z \in E$.
F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E : $F \oplus F^{\perp} = E$.
Donc il existe un unique couple $(x,y) \in F \times F^{\perp}$ tel que $z = x + y$.

x est le projeté orthogonal de z sur F.
x est caractérisé par $\begin{cases} x \in F \\ z - x \in F^{\perp} \end{cases}$



Exercice 1

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle.
On pose : $\begin{cases} z = (1,2,3) \\ F = \text{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big) \end{cases}$

On souhaite déterminer le projeté orthogonal de z sur F. Notons-le $p_F(u)$.

$p_F(u)$ est caractérisé par $\begin{cases} p_F(u) \in F \\ u - p_F(u) \in F^{\perp} \end{cases}$.

Comme $p_F(u) \in F$ alors $\big(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, p_F(u) = a(1,1,0) + b(1,0,1)\big)$.
D'autre part, $u - p_F(u) \in F^{\perp}$.

$$\begin{cases} (z-x).(1,1,0) = 0 \\ (z-x).(1,0,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \big((1,2,3) - \big(a.(1,1,0) + b.(1,0,1)\big)\big).(1,1,0) = 0 \\ \big((1,2,3) - \big(a.(1,1,0) + b.(1,0,1)\big)\big).(1,0,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a-b, 2-a, 3-b).(1,1,0) = 0 \\ (1-a-b, 2-a, 3-b).(1,0,1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(3-b) = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Donc $x = \dfrac{2}{3}.(1,1,0) + \dfrac{5}{3}.(1,0,1) = \dfrac{1}{3}(7,2,5)$ est le projeté orthogonal de z sur F.

Exercice 2

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle.
$F = \{(x,y,z) \in E, 2x + y - z = 0\}$
$u = (1,1,1)$.

$$\begin{cases} p_F(u) \in F \\ u - p_F(u) \in F^{\perp} \end{cases}$$

Système d'équations de F

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = 2a + b \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) = a(1,0,2) + b(0,1,1) \right)$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) \in \operatorname{Vect}\left((1,0,2),(0,1,1)\right)$$

Système d'équations de $F^{\perp}$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in F^{\perp} \Leftrightarrow \left((x,y,z)\right.$ est orthogonal aux vecteurs d'un base de F (résultat de cours)$\left.\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z).(1,0,2) = 0 \\ (x,y,z).(0,1,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \quad 2z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

Donc $F^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2z = 0 \text{ et } y + z = 0 \right\}$

Calcul de $p_F(u)$

$p_F(u)$ est caractérisé par $\begin{cases} p_F(u) \in F \\ u - p_F(u) \in F^{\perp} \end{cases}$

Résolvons ce système

$$\begin{cases} p_F(u) \in F \\ u - p_F(u) \in F^{\perp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ (1-x) + 2(1-z) = 0 \\ (1-y) + (1-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + \quad 2z = 3 \\ \quad y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - \ z = 0 \\ \ - y + 5z = 6 \\ \quad y + \ z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - \ z = 0 \\ \ - y + 5z = 6 \\ \quad 6z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(-y + z) = \dfrac{1}{3} \\ y = 5z - 6 = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

■