Suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ - Sur la piste de la construction de

Introduction

Thèmes d'étude : Ce résultat constitue une caractérisation intrinsèque de la convergence d'une suite réelle.

Énoncé

Suites de Cauchy – sur la piste de la construction de $\mathbb{R}$

Question 1 – un exemple

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Est-ce que si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

• Qu'en est-il pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$?

• Donner une interprétation géométrique du résultat.

Question 2 – Définition d'une suite de Cauchy

Se convaincre grâce à un dessin que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors elle vérifie la propriété P suivante :

$$P : \left(\begin{array}{l} \textit{Quelle que soit la distance } d \textit{ qu'on choisit } \left(\textit{aussi petite qu'on veut}\right), \textit{ à partir d'un certain rang,} \\ \textit{deux termes de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ sont distants d'au plus } d. \end{array} \right)$$

• Écrire cette propriété des suites convergentes avec des quantificateurs.
Les suites qui vérifient cette propriété sont appelées *suites de Cauchy*.

• Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que toute suite convergente est une suite de Cauchy (il est conseillé de s'appuyer sur le dessin fait précédemment).

Question 3 – Les suites de Cauchy réelles convergent dans $\mathbb{R}$ mais celles à valeurs dans $\mathbb{Q}$ ne convergent pas forcément dans $\mathbb{Q}$

Dans $\mathbb{R}$ la réciproque est vraie : toute suite de Cauchy de réels est convergente dans $\mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{R}$ est *complet*.

Pour voir ce qu'il en est dans $\mathbb{Q}$, étudier le cas de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $w_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$.

On introduit la suite auxiliaire définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = w_n + \frac{1}{nn!}$.

• Montrer que (w_n) et (z_n) convergent vers une même limite l et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \le l \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{nn!}$$

• Montrer que l n'est pas un nombre rationnel. (Un raisonnement par l'absurde va très bien pour cette question)

Question 4

On peut très bien montrer que, dans $\mathbb{R}$, toutes les suites de Cauchy sont convergentes. Voici une proposition de démarche pour la démonstration :

• On montre qu'une suite de Cauchy est bornée.

• On utilise le théorème de Bolzano Weierstrass.

• On montre enfin que la suite est convergente en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Remarque blablatoire

En y réfléchissant bien, on peut remarquer que le problème est que pour utiliser la définition de la convergente d'une suite, on est obligé de faire référence à la limite. Or la propriété de suite de Cauchy est une propriété intrinsèque de la suite qui ne fait donc aucune référence à la limite. Elle signifie que, dans $\mathbb{R}$, une suite qui a les qualités pour converger (c'est-à-dire celle d'être une suite de Cauchy) est convergente. Pour qu'elle converge réellement, il faut que l'espace dans lequel on travaille puisse lui « proposer » une limite. C'est en ce sens que l'on dit que $\mathbb{R}$ est complet : il ne manque aucune valeur…

Dans $\mathbb{Q}$ par contre, une suite qui est de Cauchy et qui a donc les qualités intrinsèques pour converger, peut ne pas converger parce que $\mathbb{Q}$ n'a pas les propriétés nécessaires pour permettre à la suite de converger. En d'autres termes, la suite peut « converger » vers un trou de $\mathbb{Q}$ et donc ne pas converger. Il manque des valeurs à $\mathbb{Q}$.

C'est cette constatation qui mène à la construction de $\mathbb{R}$: on enrichit (complète) $\mathbb{Q}$ de telle sorte que toutes les suites de Cauchy rationnelles convergent (en rajoutant les limites qui manquent) et on obtient $\mathbb{R}$…

Il reste en suite à effectuer quelques vérifications de circonstances pour conclure.

Outil

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Correction

En cours de rédaction…

■