

Changement de base dans un cas simple

Introduction

L'objectif de cette fiche est de présenter le changement de base en algèbre linéaire dans un cas simple pour bien comprendre ce qui se passe.

Exercice

Cadre

E est un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension 2 dont $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ sont 2 bases.

On donne la matrice coordonnées de la famille \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

f est l'application linéaire dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 1

Traduire les informations données dans l'énoncé. En particulier on dira quels sont les vecteurs u_1 et u_2 et pourquoi l'application f est bien définie.

Question 2

Calculer de 2 façons l'image par f du vecteur dont les coordonnées dans la base \mathcal{B}' sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Exprimer le résultat dans la base \mathcal{B} puis dans la base \mathcal{B}' .

La première méthode n'utilisera pas de méthode matricielle. On reviendra simplement aux définitions.

La deuxième utilisera exclusivement une méthode matricielle.

Question 3

• Donner la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' puis \mathcal{B}' et \mathcal{B} puis \mathcal{B}' .

Dans au moins l'un des cas, effectuez le calcul de 2 façons.

• Exprimez les vecteurs de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' .

Correction de l'exercice

Question 1

On nous a donné : $\begin{cases} u_1 = e_1 + 2e_2 \\ u_2 = -e_1 + e_2 \end{cases}$ et $\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = 2e_1 + e_2 \end{cases}$.

On définit une et une seule application linéaire en fixant les images des vecteurs d'une base. L'application f est donc bien définie.

Question 2

On peut faire un calcul direct ou matriciel.

Le vecteur donc on souhaite calculer l'image est le vecteur $v = 2u_1 + 3u_2$. On gardera cette notation dans toute la question.

$$\begin{aligned} f(2u_1 + 3u_2) &= f(2(e_1 + 2e_2) + 3(-e_1 + e_2)) = f(-e_1 + 7e_2) = -f(e_1) + 7f(e_2) = -(e_1 + 2e_2) + 7(2e_1 + e_2) \\ &= 13e_1 + 5e_2 \end{aligned}$$

On a exprimé le résultat dans la base \mathcal{B} . Pour l'exprimer dans la base \mathcal{B}' il faut exprimer les vecteurs de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' .

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + 2e_2 \\ u_2 = -e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = e_1 + 2e_2 \\ 3e_2 = u_1 + u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 - 2e_2 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 \\ e_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \end{cases}$$

Donc $f(2u_1 + 3u_2) = 13e_1 + 5e_2 = 13\left(\frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2\right) + 5\left(\frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2\right) = 6u_1 - 7u_2$.

On va faire la version matricielle maintenant...

On nous donne le vecteur v dans la base \mathcal{B}' . Pour avoir ce vecteur dans la base \mathcal{B} il suffit de multiplier par la

matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées dans \mathcal{B} du vecteur v (dont les coordonnées dans \mathcal{B}' sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$) sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ (remarquer comme on suit bien les calculs effectués précédemment mais en plus rapide...)}$$

On peut maintenant utiliser la matrice de f dans la base \mathcal{B} pour calculer l'image du vecteur. Les coordonnées

de l'image du vecteur v par f dans la base \mathcal{B} sont donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 14 \\ -2 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Il nous reste à convertir ces coordonnées dans la base \mathcal{B}' pour avoir le vecteur coordonnées de $f(v)$ dans \mathcal{B}' .

Pour cela on a besoin de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$.

On inverse la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui donnait l'expression des vecteurs de la base \mathcal{B}' dans la base

\mathcal{B} . Cela nous donnera la matrice qui donne l'expression des vecteurs de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ 2x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = a + b \\ y = b - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + b}{3} \\ y = \frac{-2a + b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On a donc $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $f(v)$ dans \mathcal{B}' sont donc $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Tout est cohérent.

Le calcul matriciel est plus efficace...

Question 3

- Tous les calculs nécessaires on déjà été effectués à la question précédente.

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Il s'agit d'écrire $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

■