Produit matriciel et algèbre linéaire

Introduction

L'objet de ce petit texte est d'illustrer l'utilisation du produit matriciel en algèbre linéaire et de donner une interprétation du produit $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Point cours

• Qu'est ce que 2 matrices semblables ? 2 matrices semblables représentent le même endomorphisme dans 2 bases différentes.
• Quelle relation lie 2 matrices semblables et qu'est ce qu'une matrice de passage ? Quel est son rôle ? Comment l'utilise-t-on ?
• Une matrice de passage est-elle inversible ? quelle est son inverse ?

Utilisation d'une matrice – Présentation

• On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

• $(V_1,\dots,V_p)$ est une famille de vecteurs. On veut calculer les coordonnées de $u = x_1V_1 + \dots + x_pV_p$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Pour cela on décompose la famille $(V_1,\dots,V_p)$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$: $\forall i \in \{1,\dots,p\},\ V_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k$.

Donc $u = x_1V_1 + \dots + x_pV_p = \sum_{i=1}^{p} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k \right) \underset{\substack{\text{inversion des signes} \\ \text{de sommation}}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i a_{ki} \right) e_k$.

Ainsi les coordonnées de u dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ sont $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} x_i a_{ki} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} x_i a_{ni} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^{ère} \text{ coordonnée} \\ \\ k^{ième} \text{ coordonnée} \\ \\ n^{ième} \text{ coordonnée} \end{matrix}$.

Conclusion

• Le vecteur coordonnées de $u = x_1V_1 + \dots + x_pV_p$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est le produit de la matrice des coordonnées de la famille $(V_1,\dots,V_p)$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ par le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

• La matrice est $mat_{(e_1,\dots,e_n)}(V_1,\dots,V_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, le vecteur coordonnées de u est $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

• Suivant le choix de la famille $(V_1,\dots,V_p)$ on illustre un certain nombre de notions du cours.

Première utilisation – Matrice de passage $p = n$

• Ici la famille $(V_1,...,V_n)$ est une base de E.

• Le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ représente le vecteur coordonnée d'un vecteur u dans la base $(V_1,...,V_n)$: $u = \sum_{k=1}^{n} x_k V_k$. On souhaite déterminer les coordonnées de u dans la base $(e_1,...,e_n)$. Pour cela on multiplie le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ par la matrice des coordonnées de $(V_1,...,V_n)$ dans la base $(e_1,...,e_n)$.

Les coordonnées de u dans la base de $(e_1,...,e_n)$ sont donc $mat_{(e_1,...,e_n)}(V_1,...,V_p) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Deuxième utilisation – Calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire

• Soient f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-ev F de dimension p vers E et, $(u_1,...,u_p)$, une base de F.

• On prend toujours un vecteur u dont les coordonnées dans la base $(u_1,...,u_p)$ sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

• Cette fois la famille $(V_1,...,V_p)$ est la famille image de la base $(u_1,...,u_p)$ par l'application linéaire f :

$$(V_1,...,V_p) = (f(u_1),...,f(u_p)).$$

L'image de u est $f(u) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(u_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k V_k$.

• Pour avoir les coordonnées de $f(u)$ dans la base $(e_1,...,e_n)$, on multiplie le vecteur coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ de u dans la base $(u_1,...,u_p)$ par la matrice coordonnées de la famille $(V_1,...,V_p) = (f(u_1),...,f(u_p))$ dans la base $(e_1,...,e_n)$. Cette matrice est appelée matrice de l'application linéaire f dans les bases $(u_1,...,u_p)$ et $(e_1,...,e_n)$.

$mat_{(u_1,...,u_p),(e_1,...,e_n)}(f) = mat_{(e_1,...,e_n)}(f(u_1),...,f(u_p)) = mat_{(e_1,...,e_n)}(V_1,...,V_p)$.

Troisième utilisation

C'est la plus générale. Elle correspond à ce qui a été fait dans la présentation. On adapte la famille $(V_1,...,V_p)$ à la situation et à ce qu'on veut faire.

Exercice

Cet exercice ne nécessite aucun calcul et ne fait intervenir que des connaissances élémentaires ou déjà vues en cours. Lorsqu'on sait bien articuler ces différentes connaissances, l'exercice se fait très facilement.
Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces de dimensions 3 et 4 respectivement. Soit u une application linéaire de E dans F. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ et $\mathcal{C}' = (g_1, g_2, g_3, g_4)$, 2 bases de F.
On définit u de la façon suivante :

$$u(e_1) = f_1 + 2f_2 + f_3 + f_4, u(e_2) = 2f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 2f_4 \text{ et } u(e_3) = 2f_1 + f_1 + f_3 + f_4$$

On donne aussi les expressions des vecteurs de la base $\mathcal{C}' = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ dans la base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$:

$$\begin{cases} f_1 = 3g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \\ f_2 = g_1 + 3g_2 + g_3 + g_4 \\ f_3 = g_1 + g_2 + 3g_3 + g_4 \\ f_4 = g_1 + g_2 + g_3 + 3g_4 \end{cases}$$

• Comment calculer l'image de $xe_1 + ye_2 + ze_3$

$\rightarrow$ dans C

$\rightarrow$ dans C'

par calcul direct puis matriciellement.

• Déterminer $\underset{C}{mat_{\mathcal{B}}}(u)$ et $\underset{C'}{mat_{\mathcal{B}}}(u)$.

• $\operatorname{Im} u$ est-il un sous-espace vectoriel de E, de F ? Peut-on avoir u injective, surjective ? Quelle est la dimension de $\operatorname{Im} u$?

Correction de l'exercice

• $$\begin{aligned} u(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) \\ &= x(f_1 + 2f_2 + f_3 + f_4) + y(2f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 2f_4) + z(2f_1 + f_1 + f_3 + f_4). \\ &= (x + 2y + 2z) f_1 + (2x + 4y + z) f_2 + (x + 2y + z) f_3 + (x + 2y + z) f_4 \end{aligned}$$

Ou alors, on détermine la matrice $\underset{C}{mat_{\mathcal{B}}}(u)$ et on calcule les coordonnées de l'image du vecteur dans $C = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

$$\underset{C}{mat_{\mathcal{B}}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 2z \\ 2x + 4y + z \\ x + 2y + z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$$

• D'après ce qu'on a fait précédemment :

$$\underset{C'}{mat_{\mathcal{B}}}(u) = mat_{C'}(C) \times \underset{C}{mat_{\mathcal{B}}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 9 \\ 9 & 18 & 7 \\ 7 & 14 & 7 \\ 7 & 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

• $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de F. u ne peut pas être surjective car $\operatorname{Im} u = Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ et donc $\operatorname{Im} u$ est de dimension 3 au plus. Or F est de dimension 4. Donc $\operatorname{Im} u$ est strictement inclus dans F.
Le rang de u est la dimension de $\operatorname{Im} u$, c'est-à-dire le rang de l'un de ses familles génératrices, c'est-à-dire le rang de la famille $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$.

On a la matrice coordonnées de cette famille dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4). On peut l'échelonner mais un simple examen suffit à voir qu'elle est au plus de rang 2 (les 2 premières colonnes sont liées) et que est de rang au moins 2 (la première colonne et la dernière colonne sont indépendantes). Donc $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est de rang 2 et $rg(u) = 2$.
Par le théorème du rang, on obtient que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Donc une base de $\operatorname{Ker} f$ est composé d'un seul vecteur. L'examen de la matrice nous donne que $2e_1 - e_2$ a pour image 0_F. Donc $\operatorname{Ker} f = Vect(2e_1 - e_2)$.
On aurait aussi pu travailler matriciellement.
On résout $u(v) = 0_F$ d'inconnue $v \in E$. La décomposition de v dans (e_1, e_2, e_3) est du type $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$\left(u(v)=0_F\right) \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+2z=0\\ 2x+4y\ \ +z=0\\ x+2y\ \ +z=0\\ x+2y\ \ +z=0\end{cases} \Leftrightarrow etc...$$

Une suite avec quelques calculs à terminer…

Cadre

Soit la famille (c_1,c_2,c_3) dont la matrice de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est : $mat_{(e_1,e_2,e_3)}(c_1,c_2,c_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&3&1\\1&3&2\end{pmatrix}$.

Question

Quelle est la matrice de l'application u dans les bases (c_1,c_2,c_3) et (g_1,g_2,g_3,g_4) ?

Correction

D'après tout ce qu'on a fait, on trouve $\underset{C}{mat_{(c_1,c_2,c_3)}}(u)=mat_{C'}\left(C'\right)\times \underset{C}{mat_{\mathcal{B}}}(u)\times mat_{\mathcal{B}}(c_1,c_2,c_3)$.

Sinon, on aurait pu calculer $u(c_1),u(c_2)$ et $u(c_3)$ et exprimer le résultat dans la base (g_1,g_2,g_3,g_4) :

$u(c_1)=u(e_2+e_3)=u(e_2)+u(e_3)=(f_1+2f_2+f_3+f_4)+(2f_1+4f_2+2f_3+2f_4)=etc...$

■