

Suites de Cauchy dans \mathbb{R} - Sur la piste de la construction de

Introduction

Thèmes d'étude : Ce résultat constitue une caractérisation intrinsèque de la convergence d'une suite réelle.

Énoncé

Suites de Cauchy – sur la piste de la construction de \mathbb{R}

Question 1 – un exemple

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Est-ce que si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?
- Qu'en est-il pour la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$?
- Donner une interprétation géométrique du résultat.

Question 2 – Définition d'une suite de Cauchy

Se convaincre grâce à un dessin que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors elle vérifie la propriété P suivante :

$$P : \left(\begin{array}{l} \text{Quelle que soit la distance } d \text{ qu'on choisit (aussi petite qu'on veut), à partir d'un certain rang,} \\ \text{deux termes de la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont distants d'au plus } d. \end{array} \right)$$

- Écrire cette propriété des suites convergentes avec des quantificateurs.

Les suites qui vérifient cette propriété sont appelées *suites de Cauchy*.

- Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que toute suite convergente est une suite de Cauchy (il est conseillé de s'appuyer sur le dessin fait précédemment).

Question 3 – Les suites de Cauchy réelles convergent dans \mathbb{R} mais celles à valeurs dans \mathbb{Q} ne convergent pas forcément dans \mathbb{Q}

Dans \mathbb{R} la réciproque est vraie : toute suite de Cauchy de réels est convergente dans \mathbb{R} . On dit que \mathbb{R} est *complet*.

Pour voir ce qu'il en est dans \mathbb{Q} , étudier le cas de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $w_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

On introduit la suite auxiliaire définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = w_n + \frac{1}{nn!}$.

- Montrer que (w_n) et (z_n) convergent vers une même limite l et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq l \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{nn!}$$

- Montrer que l n'est pas un nombre rationnel. (Un raisonnement par l'absurde va très bien pour cette question)

Question 4

On peut très bien montrer que, dans \mathbb{R} , toutes les suites de Cauchy sont convergentes. Voici une proposition de démarche pour la démonstration :

- On montre qu'une suite de Cauchy est bornée.
- On utilise le théorème de Bolzano Weierstrass.
- On montre enfin que la suite est convergente en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Remarque blablaire

En y réfléchissant bien, on peut remarquer que le problème est que pour utiliser la définition de la convergence d'une suite, on est obligé de faire référence à la limite. Or la propriété de suite de Cauchy est une propriété intrinsèque de la suite qui ne fait donc aucune référence à la limite. Elle signifie que, dans \mathbb{R} , une suite qui a les qualités pour converger (c'est-à-dire celle d'être une suite de Cauchy) est convergente. Pour qu'elle converge réellement, il faut que l'espace dans lequel on travaille puisse lui « proposer » une limite. C'est en ce sens que l'on dit que \mathbb{R} est complet : il ne manque aucune valeur...

Dans \mathbb{Q} par contre, une suite qui est de Cauchy et qui a donc les qualités intrinsèques pour converger, peut ne pas converger parce que \mathbb{Q} n'a pas les propriétés nécessaires pour permettre à la suite de converger. En d'autres termes, la suite peut « converger » vers un trou de \mathbb{Q} et donc ne pas converger. Il manque des valeurs à \mathbb{Q} .

C'est cette constatation qui mène à la construction de \mathbb{R} : on enrichit (complète) \mathbb{Q} de telle sorte que toutes les suites de Cauchy rationnelles convergent (en rajoutant les limites qui manquent) et on obtient \mathbb{R} ...

Il reste en suite à effectuer quelques vérifications de circonstances pour conclure.

Outil

| Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Correction

| En cours de rédaction...

