Un théorème de prolongement C^1

Introduction

Thèmes d'étude : un résultat sur le prolongement d'une fonction défini au voisinage d'un point en une fonction de classe C^1 en ce point.

Énoncé

Hypothèse

• f est définie sur $]x_0,+\infty[$.

• On suppose que f est une fonction continue et dérivable au voisinage de x_0. On suppose de plus que la limite de f' en x_0 existe et vaut l.

Conclusion

f est continue (ou prolongeable par continuité dans le cas où f ne serait pas définie en x_0) en x_0 et sa dérivée vaut l.

Outil

Lemme – Critère de Cauchy pour les limites

$[f \text{ a une limite en } x_0]\, ssi \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,x') \in \left(]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\right)^2, |f(x)-f(x')| < \varepsilon\right]$

■

On va utiliser ce lemme sur les voisinages à droite de x_0.

Commentaire

Ce résultat est une conséquence du fait que $\mathbb{R}$ est complet, c'est à dire qu'il n'a pas de trou.

L'avantage de cette proposition est que l'on peut caractériser le fait qu'une fonction ait une limite en x_0 sans avoir à connaître cette limite et sans avoir à connaître ce qu'il se passe exactement en x_0. On caractérise donc le fait que la fonction a toutes les qualités pour qu'il y ait une limite en le point x_0. Et pour que la limite existe, il suffit que $\mathbb{R}$ soit suffisamment riche pour lui en proposer une, d'où l'importance que $\mathbb{R}$ n'ait pas de trou.

Indications

• Montrer que f est prolongeable par continuité en x_0.

• Montrer enfin que f est dérivable en x_0 et que la dérivée est continue en x_0.

Correction

• $f'(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ donc $f'(x)$ est bornée au voisinage de x_0. On le traduit : cela signifie qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f'(x)$ est borné. C'est à dire $\exists a > 0, \exists M > 0, \forall x \in]x_0, x_0+a[, |f'(x)| \le M$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On pose $\alpha = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{M}, a\right)$ (>0).

Soit $(x,x') \in \left(]x_0, x_0+\alpha[\right)^2$. On suppose $x \le x'$.

f est continue sur l'intervalle $[x,x']$ et dérivable sur $]x,x'[$. Et $\forall t \in]x,x'[$, $|f'(t)| \le M$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(x)-f(x')| \leq M|x-x'| \leq M\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

Donc f vérifie le critère de Cauchy pour les limites. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ existe. Donc f est prolongeable par continuité en x_0.

• On va donc supposer, dans la suite, que f est continue en x_0.

Pour montrer que f est dérivable en x_0, on va examiner la limite du taux d'accroissement de f en x_0 et montrer qu'elle vaut l.

Soit $x \in \left]x_0,+\infty\right[$. f est continue sur $[x_0,x]$ et dérivable sur $\left]x_0,x\right[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis. Donc $\exists c(x) \in \left]x_0,x\right[,\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c(x))$.

Lorsque $x \to x_0, c(x)\to x_0$ et $f'(c(x))\to l$. Donc $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\to} l$.

Conclusion

f est dérivable en x_0 et sa dérivée est l.

Remarque

En fait on a montré que pour que f soit prolongeable par continuité en x_0, il suffit que f' soit bornée au voisinage de x_0.

Lorsque la dérivée de f est bornée au voisinage de x_0, l'accroissement de f est contrôlé et la fonction ne peut plus faire de "gros écarts" lorsque x se rapproche de x_0...

■